

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**– ETAPA LOCALĂ –**  
**08.02.2026**  
**CLASA a VI-a**

**SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

**Notă:** - Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.  
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului precizat în barem.  
- Se acordă zece puncte din oficiu.

**Subiectul I (20 puncte)**

Maria aranjează cutii pe un raft. Dacă le grupează câte 2, 3, 4, 5 sau 6, rămâne o grupă cu o singură cutie. Dacă formează grupe de câte 7 cutii, nu rămân grupe incomplete.

- a) Pot fi 285 de cutii? Justifică răspunsul.
- b) Stabilește numărul de cutii de pe raft, știind că este cel mai mic număr posibil.

**Soluție:**

Notăm cu  $n$  numărul de cutii.

- a) Dacă  $n = 285$ , atunci

$$285: 2 = 142 \text{ } r \text{ } 1 - \text{adevărat}$$

$$285: 3 = 95 \text{ } r \text{ } 0 - \text{fals.}$$

Rezultă că nu pot fi 285 de cutii.

- b)  $n: 2 = C_1, r \text{ } 1$

$$n: 3 = C_2, r \text{ } 1$$

$$n: 4 = C_3, r \text{ } 1$$

$$n: 5 = C_4, r \text{ } 1$$

$$n: 6 = C_5, r \text{ } 1$$

$$n: 7 = C_6, r \text{ } 0.$$

Din teorema împărțirii cu rest rezultă că:

$$n = 2 \cdot C_1 + 1$$

$$n = 3 \cdot C_2 + 1$$

$$n = 4 \cdot C_3 + 1$$

$$n = 5 \cdot C_4 + 1$$

$$n = 6 \cdot C_5 + 1$$

$$n : 7.$$

Scăzând 1 din primele 4 egalități, obținem că  $n - 1 : 2, 3, 4, 5, 6 \Rightarrow n - 1 \in M_{2,3,4,5,6}$ .

Dar  $n$  este cel mai mic număr posibil

$\Rightarrow n - 1 = c.m.m.m.c. \text{ al numerelor } 2, 3, 4, 5, 6 \Rightarrow n - 1 = 60 \Rightarrow n = 61 \Rightarrow \text{fals, pentru}$   
 că  $n$  nu este divizibil cu 7.

Căutând multipli ai 60, găsim că  $n - 1 = 300 \Rightarrow n = 301$ , care este divizibil cu 7

$\Rightarrow$  numărul de cutii este 301.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) Dacă $n = 285$ , atunci: $285 : 2 = 142, r 1$ - adevărat $285 : 3 = 95, r 0$ – fals. Rezultă că nu pot fi 285 de cutii.	5p
b) Scrie $n : 2 = C_1, r 1; n : 3 = C_2, r 1; n : 4 = C_3, r 1;$ $n : 5 = C_4, r 1; n : 6 = C_5, r 1; n : 7 = C_5, r 0.$	3p
Deduce din teorema împărțirii cu rest rezultă că: $n = 2 \cdot C_1 + 1; n = 3 \cdot C_2 + 1; n = 4 \cdot C_3 + 1;$ $n = 5 \cdot C_4 + 1; n = 6 \cdot C_5 + 1; n : 7.$	5p
Argumentează că scăzând 1 din primele 4 egalități, obținem că $n - 1 : 2, 3, 4, 5, 6 \Rightarrow n - 1 \in M_{2,3,4,5,6}.$	2p
Dar $n$ este cel mai mic număr posibil, rezultă că $n - 1 = c.m.m.m.c. \text{ al numerelor } 2, 3, 4, 5, 6 \Rightarrow n - 1 = 60 \Rightarrow n = 61$ $\Rightarrow \text{fals, pentru că } n \text{ nu este divizibil cu } 7.$	3p
Căutând multipli ai 60, găsim că $n - 1 = 300 \Rightarrow n = 301$ , care este divizibil cu 7 $\Rightarrow$ numărul de cutii este 301.	2p
<b>Total</b>	<b>20p</b>

**Subiectul II (20 puncte)**

Pe o dreaptă se consideră punctele  $A_0; A_1; A_2; \dots; A_{2026}$ , în această ordine, astfel ca  $A_0A_1 = 1$  cm,  $A_1A_2 = 2$  cm,  $A_2A_3 = 3$  cm,...,  $A_{2025}A_{2026} = 2026$  cm și  $M$  mijlocul segmentului  $A_0A_{2026}$ .

a) Să se determine lungimea segmentului  $A_0A_{2026}$ .

b) Determinați  $k \in \mathbb{N}$  pentru care punctul  $M$  aparține segmentului  $A_kA_{k+1}$ .

**Soluție:**

Calculând:

$$\begin{aligned} \text{a) } A_0A_{2026} &= A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{2025}A_{2026} = 1 + 2 + 3 + \dots + 2026 = \\ &= \frac{2026 \cdot 2027}{2} = 1013 \cdot 2027 = 2\,053\,351. \end{aligned}$$

$$\text{b) } A_0M = \frac{A_0A_{2026}}{2} = \frac{1013 \cdot 2027}{2} = \frac{2\,053\,351}{2} = 1\,026\,675,5 \text{ cm}$$

$$\text{Din } M \in A_kA_{k+1} \Leftrightarrow A_0A_k < A_0M < A_0A_{k+1}$$

$$\frac{k(k+1)}{2} < \frac{1013 \cdot 2027}{2} < \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$k(k+1) < 1013 \cdot 2027 < (k+1)(k+2)$$

$$1432 \cdot 1433 < 1013 \cdot 2027 < 1433 \cdot 1434$$

$$2\,052\,056 < 2\,053\,351 < 2\,054\,922 \Rightarrow k = 1432.$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Deduce: $A_0A_{2026} = 1013 \cdot 2027 = 2\,053\,351$	5p
a) Deduce: $A_0M = \frac{A_0A_{2026}}{2} = \frac{1013 \cdot 2027}{2} = \frac{2\,053\,351}{2} = 1\,026\,675,5 \text{ cm}$	2p
Argumentează: $M \in A_kA_{k+1} \Leftrightarrow A_0A_k < A_0M < A_0A_{k+1}$	3p
Deduce: $\frac{k(k+1)}{2} < \frac{1013 \cdot 2027}{2} < \frac{(k+1)(k+2)}{2}$	3p
Deduce: $k(k+1) < 1013 \cdot 2027 < (k+1)(k+2)$	2p
Deduce: $1432 \cdot 1433 < 1013 \cdot 2027 < 1433 \cdot 1434$ $2\,052\,056 < 2\,053\,351 < 2\,054\,922 \Rightarrow k = 1432.$	5p
<b>Total</b>	<b>20p</b>

**Subiectul III (25 puncte)**

Fie  $A = \left\{ \frac{2035}{10}, \frac{2036}{11}, \frac{2037}{12}, \dots \right\}$ . Determinați cardinalul mulțimii  $A \cap \mathbb{N}$ .

**Soluție:**

Elementele mulțimii  $A$  sunt:  $\frac{2035}{10}, \frac{2036}{11} = \frac{2035+1}{10+1}, \frac{2037}{12} = \frac{2035+2}{10+2}, \frac{2038}{13} = \frac{2035+3}{10+3}, \dots$

Observăm că elementele lui  $A$  sunt de forma  $\frac{2035+k}{10+k}$ , cu  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .

$\frac{2035+k}{10+k} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 10+k \mid 2035+k$ , iar cum  $10+k \mid 10+k$ , rezultă că  $10+k \mid 2025$ .

Deci  $10+k \in D_{2025} = \{1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 81, 135, 225, 405, 675, 2025\}$ .

Cum  $k \in \mathbb{N}$ , rezultă  $k \in \{5, 15, 17, 35, 65, 71, 125, 215, 395, 665, 2015\}$ .

Se obține deci,  $\text{card}(A \cap \mathbb{N}) = 11$ .

Detalii de rezolvare	Barem asociat
$A = \left\{ \frac{2035}{10}, \frac{2036}{11} = \frac{2035+1}{10+1}, \frac{2037}{12} = \frac{2035+2}{10+2}, \frac{2038}{13} = \frac{2035+3}{10+3}, \dots \right\}$	3p
Observă că elementele lui $A$ sunt de forma $\frac{2035+k}{10+k}$ , cu $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .	2p
$\frac{2035+k}{10+k} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 10+k \mid 2035+k$	2p
Cum $10+k \mid 10+k$ , deduce că $10+k \mid 2025$ .	5p
$10+k \in D_{2025} = \{1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 81, 135, 225, 405, 675, 2025\}$ .	5p
$k \in \mathbb{N} \Rightarrow k \in \{5, 15, 17, 35, 65, 71, 125, 215, 395, 665, 2015\}$ .	5p
Obține $\text{card}(A \cap \mathbb{N}) = 11$ .	3p
<b>Total</b>	<b>25p</b>

### Subiectul IV (25 puncte)

Se consideră unghiul  $AOB$  cu măsura de  $150^\circ$ . Perpendiculara în punctul  $B$  pe  $OB$  intersectează bisectoarea unghiului  $AOB$  în punctul  $M$ . Fie  $C$  un punct pe dreapta  $BM$ ,  $C$  situat între  $B$  și  $M$ . Paralela la  $OA$  dusă prin punctul  $C$  intersectează bisectoarea  $OM$  în punctul  $D$ .

a) Aflați măsura unghiului  $DCB$ .

b) Demonstrați că măsurile unghiurilor  $AOM$  și  $MDC$  sunt invers proporționale cu  $\frac{1}{25}$  și  $\frac{1}{35}$ .

#### Soluție:

a) Din  $MB \perp OB \Rightarrow \sphericalangle MBO = 90^\circ$ . Construim  $NB \parallel OA, N \in \text{Int}\sphericalangle AOB$ .

Cum  $OB$  secantă  $\Rightarrow \sphericalangle AOB + \sphericalangle OBN = 180^\circ$ , iar cum  $\sphericalangle AOB = 150^\circ$ , rezultă că  $\sphericalangle OBN = 30^\circ$ . De aici rezultă că  $\sphericalangle CBN = 90^\circ - \sphericalangle OBN = 60^\circ$ .

Cum  $NB \parallel OA, CD \parallel OA \Rightarrow CD \parallel NB$ , iar cum  $MB$  secantă, rezultă că

$\sphericalangle NBC + \sphericalangle BCD = 180^\circ$ , de unde  $\sphericalangle BCD = 120^\circ$ .

b) Din  $OM$  - bisectoarea  $\sphericalangle AOB = 150^\circ$ , obținem că

$\sphericalangle AOM = \sphericalangle MOB = 75^\circ$ .

Cum  $CD \parallel OA$ , iar  $OM$  secantă, rezultă că  $\sphericalangle CDO = \sphericalangle DOA = 75^\circ$  (alterne interne).

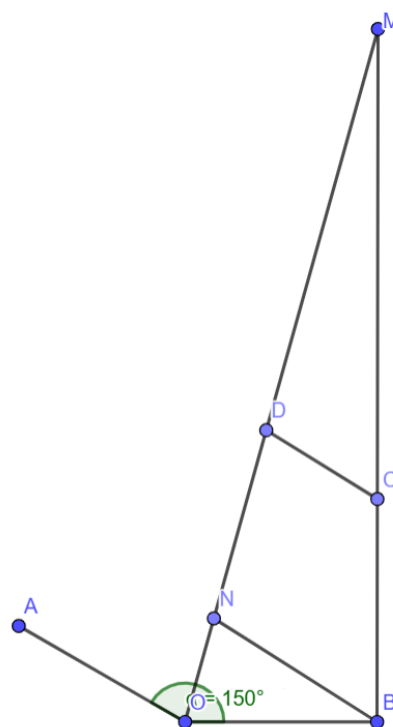
Obținem  $\sphericalangle MDC = 180^\circ - \sphericalangle CDO = 105^\circ$ .

$\{\sphericalangle AOM, \sphericalangle MDC\}$  i.p.  $\left\{\frac{1}{25}, \frac{1}{35}\right\} \Leftrightarrow \{75, 105\}$  i.p.  $\left\{\frac{1}{25}, \frac{1}{35}\right\}$

$\Leftrightarrow 75 \cdot \frac{1}{25} = 105 \cdot \frac{1}{35}$ .

Cum  $75 \cdot \frac{1}{25} = 105 \cdot \frac{1}{35}$ , rezultă că  $\sphericalangle AOM, \sphericalangle MDC$  sunt

invers proporționale cu  $\frac{1}{25}, \frac{1}{35}$ .



Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) Realizarea figurii	3p
$MB \perp OB \Rightarrow \sphericalangle MBO = 90^\circ$ . Construim $NB \parallel OA, N \in \text{Int} \sphericalangle AOB$ . $OB$ secantă $\Rightarrow \sphericalangle AOB + \sphericalangle OBN = 180^\circ \Rightarrow \sphericalangle OBN = 30^\circ \Rightarrow \sphericalangle CBN = 90^\circ - \sphericalangle OBN = 60^\circ$ .	5p
$NB \parallel OA, CD \parallel OA \Rightarrow CD \parallel NB$	2p
$MB$ secantă $\Rightarrow \sphericalangle NBC + \sphericalangle BCD = 180^\circ \Rightarrow \sphericalangle BCD = 120^\circ$ .	3p
b) $OM$ - bis. $\sphericalangle AOB \Rightarrow \sphericalangle AOM = \sphericalangle MOB = 75^\circ$ .	2p
$CD \parallel OA, OM$ secantă $\Rightarrow \sphericalangle CDO = \sphericalangle DOA = 75^\circ$ (alterne interne). Obține $\sphericalangle MDC = 180^\circ - \sphericalangle CDO = 105^\circ$ .	5p
$\{\sphericalangle AOM, \sphericalangle MDC\}$ i.p. $\left\{\frac{1}{25}, \frac{1}{35}\right\} \Leftrightarrow \{75, 105\}$ i.p. $\left\{\frac{1}{25}, \frac{1}{35}\right\}$ Cum $75 \cdot \frac{1}{25} = 105 \cdot \frac{1}{35} \Rightarrow \sphericalangle AOM, \sphericalangle MDC$ sunt invers proporționale cu $\frac{1}{25}, \frac{1}{35}$ .	5p
<b>Total</b>	<b>25p</b>